

Applications - Chapitre 11

**Dynamique terrestre, pendule de Foucault
et système de points matériels**

EPFL

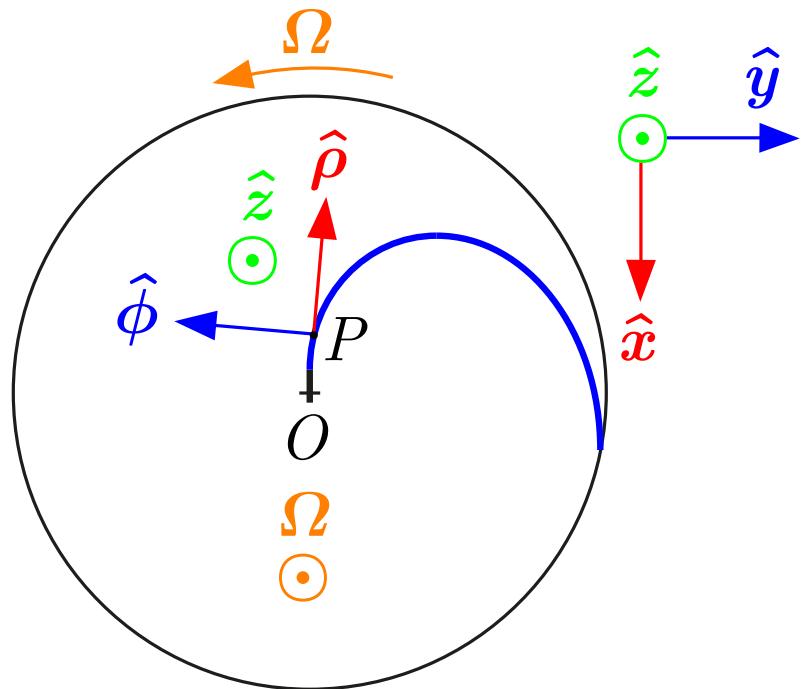
A.11.1 Jet d'eau tournant

A.11.2 Pendule double

A.11.1 Jet d'eau tournant

A.11.2 Pendule double

- Une buse est fixée au centre O d'un disque. Le disque est en rotation à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$ dans le sens trigonométrique par rapport au sol.
- Un jet d'eau sort horizontalement et radialement de la buse. On modélise le mouvement d'une goutte d'eau considérée comme un point matériel P de masse m .
- La trajectoire du jet d'eau est la courbe bleue fixe dans le référentiel accéléré du disque.



① Référentiel absolu : sol
repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

② Référentiel relatif : disque
repère cylindrique $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$

- Grandeur cinématiques relatives :

- Position relative : $(A.11.1)$

$$\mathbf{r}_r(P) = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

- Vitesse relative : $(A.11.2)$

$$\mathbf{v}_r(P) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$$

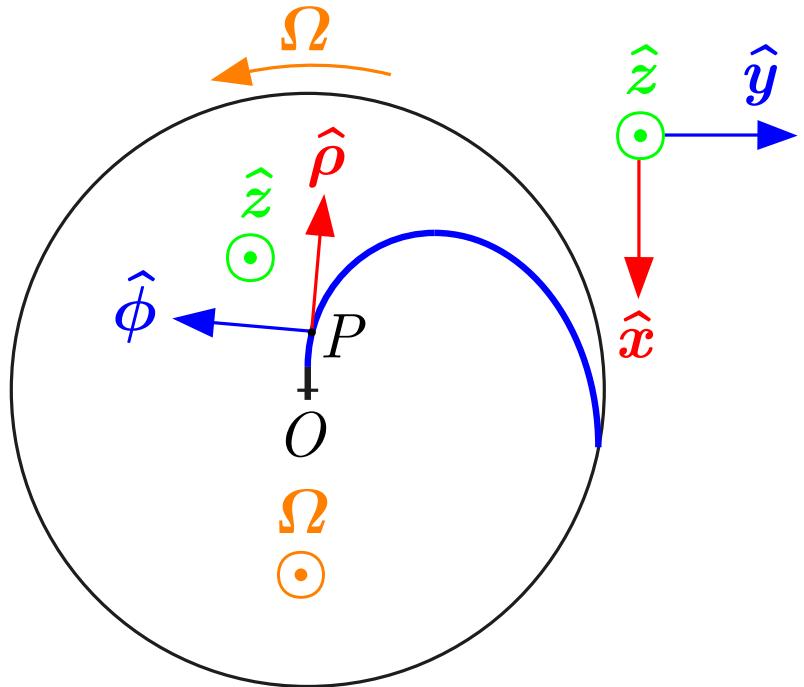
- Accélération relative :

$$\mathbf{a}_r(P) = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right) \hat{\rho} + \left(\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi} \right) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z} \quad (A.11.3)$$

- Force extérieure :

- Poids :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = -mg \hat{z} \quad (A.11.4)$$



- Grandeurs cinématiques relatives :

$$\mathbf{r}_r(P) = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$\mathbf{v}_r(P) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}$$

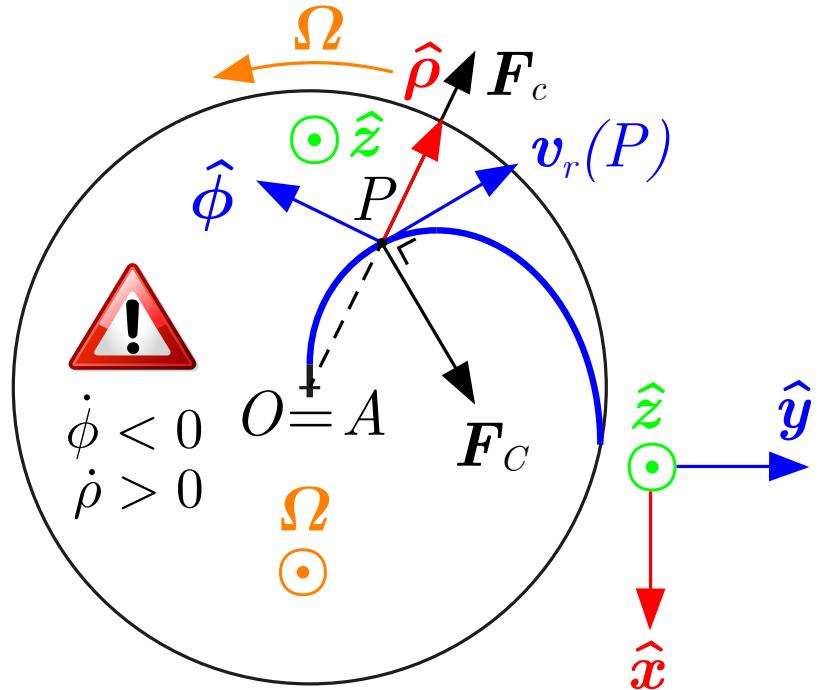
- Forces d'inertie : $\dot{\Omega} = \mathbf{0}$; $\mathbf{a}_a(A) = \mathbf{0}$

- Force centrifuge :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = -m \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})) \\ &= m \rho \Omega^2 \hat{\rho} \end{aligned} \quad (A.11.5)$$

- Force de Coriolis :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = -2m \Omega \hat{z} \times (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}) \\ &= -2m \dot{\rho} \Omega \hat{\phi} + 2m \rho \dot{\phi} \Omega \hat{\rho} \end{aligned} \quad (A.11.6)$$



- Loi du mouvement relatif :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r (P) \quad (A.11.7)$$

- Equations du mouvement relatif :

selon $\hat{\rho}$: $m \rho \Omega^2 + 2 m \rho \dot{\phi} \Omega = m \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right)$ (A.11.8)

selon $\hat{\phi}$: $-2 m \dot{\rho} \Omega = m \left(\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi} \right)$ (A.11.9)

selon \hat{z} : $-mg = m \ddot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -g$ (A.11.10)

- Mouvement radial : (A.11.8) \Rightarrow

$$\ddot{\rho} - \left(\Omega + \dot{\phi} \right)^2 \rho = 0 \quad (A.11.11)$$

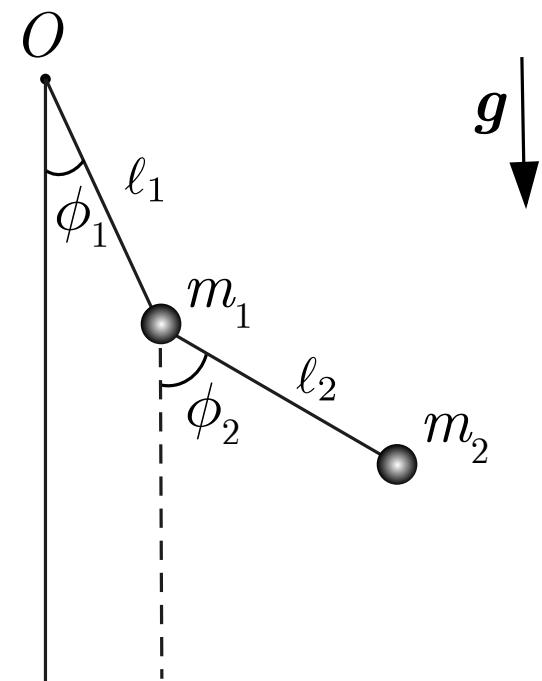
- Mouvement azimutal : (A.11.9) \Rightarrow

$$\rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \left(\Omega + \dot{\phi} \right) = 0 \quad (A.11.12)$$

A.11.1 Jet d'eau tournant

A.11.2 Pendule double

- On considère un pendule double constitué de deux bras de masses négligeables attachés l'un à l'autre.
- Le premier bras de longueur ℓ_1 est attaché à l'origine au point O . Un point matériel de masse m_1 est fixé à l'autre extrémité. L'angle d'oscillation dans le plan vertical est ϕ_1 .
- Le deuxième bras de longueur ℓ_2 est attaché au point matériel de masse m_1 . Un point matériel de masse m_2 est fixé à l'autre extrémité. L'angle d'oscillation dans le plan vertical est ϕ_2 .



- Vecteurs positions :

$$\mathbf{r}_1 = \ell_1 \hat{\boldsymbol{\rho}}_1$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \ell_2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_2$$

- Changement de base : rotation d'angle $\phi_2 - \phi_1$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_2 = \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_2 = -\sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

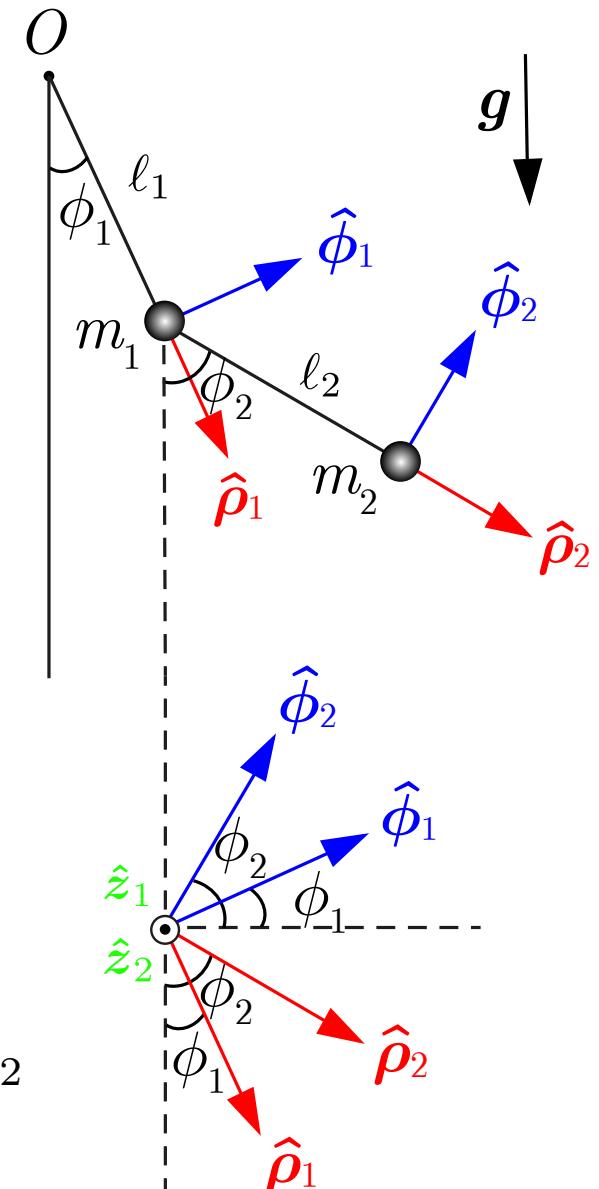
- Vecteurs vitesses : formules de Poisson

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \ell_1 \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_1 = \ell_1 \dot{\phi}_1 \hat{\mathbf{z}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 = \ell_1 \dot{\phi}_1 \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 = \ell_2 \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}_2 = \ell_2 \dot{\phi}_2 \hat{\mathbf{z}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 = \ell_2 \dot{\phi}_2 \hat{\boldsymbol{\phi}}_2$$

$$= \ell_2 \dot{\phi}_2 \left(-\sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 \right)$$

$$\mathbf{v}_2 = -\ell_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \left(\ell_1 \dot{\phi}_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$



- Vecteurs vitesses :

$$\mathbf{v}_1 = \ell_1 \dot{\phi}_1 \hat{\phi}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = -\ell_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \hat{\rho}_1$$

$$+ \left(\ell_1 \dot{\phi}_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \hat{\phi}_1$$

- Vitesses quadratiques :

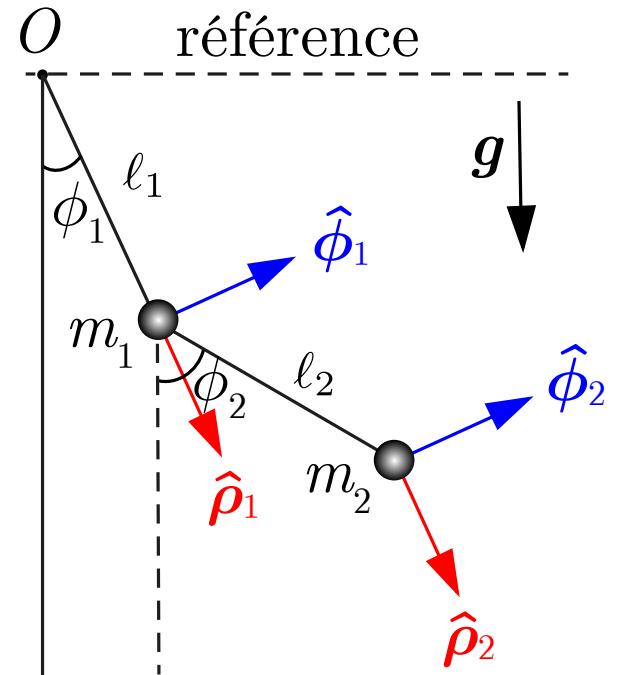
$$v_1^2 = \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 \quad (A.11.13)$$

$$v_2^2 = \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 \sin^2(\phi_2 - \phi_1) + \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 \cos^2(\phi_2 - \phi_1)$$

$$+ 2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos^2(\phi_2 - \phi_1)$$

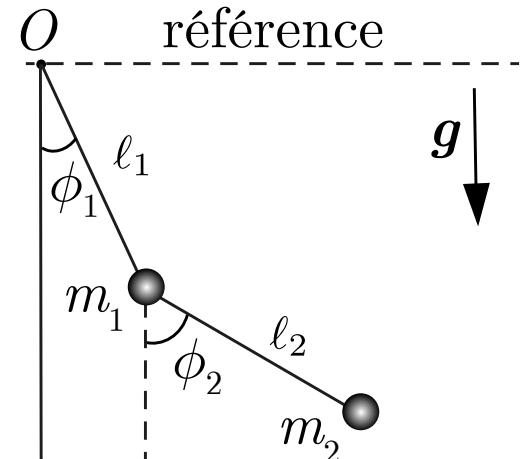
$$= \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (A.11.14)$$

- On choisit comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle la droite horizontale qui passe par le point O .



- Energie cinétique :

$$\begin{aligned}
 T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 \right) \\
 &\quad + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)
 \end{aligned}
 \tag{A.11.15}$$



- Energie potentielle :

$$\begin{aligned}
 V &= V_{g1} + V_{g2} = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 \\
 &= -m_1 g \ell_1 \cos \phi_1 - m_2 g (\ell_1 \cos \phi_1 + \ell_2 \cos \phi_2)
 \end{aligned}
 \tag{A.11.16}$$

- Energie mécanique : $E = T + V$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\
 &\quad - (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \phi_1 - m_2 g \ell_2 \cos \phi_2
 \end{aligned}
 \tag{A.11.17}$$

- Conservation de l'énergie mécanique : $\dot{E} = 0$

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1 \ddot{\phi}_1 + m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2 \ddot{\phi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 (\dot{\phi}_1 \ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_1 \dot{\phi}_2) \cos(\phi_2 - \phi_1) \\
 & + m_2 \ell_1 \ell_2 (\dot{\phi}_1^2 \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2^2) \sin(\phi_2 - \phi_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \\
 & + m_2 g \ell_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.11.18}$$

- Factorisation : vitesses angulaires $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$: 2 degrés de liberté

$$\begin{aligned}
 & \left[(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right. \\
 & \quad \left. - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \phi_1 \right] \dot{\phi}_1 \\
 & + \left[m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right. \\
 & \quad \left. + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + m_2 g \ell_2 \sin \phi_2 \right] \dot{\phi}_2 = 0
 \end{aligned} \tag{A.11.19}$$

- Equations du mouvement : (A.11.19) satisfaite pour tout $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$

$$(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \phi_1 = 0 \quad (A.11.20)$$

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) + m_2 g \ell_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (A.11.21)$$

- Dans le cas général, les équations du mouvement couplées (A.11.20) et (A.11.21) donnent lieu à un mouvement chaotique caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales.
- Dans la limite des mouvements lents avec de petits angles, on fait une approximation au 2^e ordre en ϕ_1 , ϕ_2 , $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ dans l'expression de l'énergie mécanique E . Ces équations décrivent alors deux oscillateurs harmoniques couplés.

- Limite des mouvements lents avec de petits angles :

2^e ordre en ϕ_1 , ϕ_2 , $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ pour E

$$\cos \phi_1 \simeq 1 - \frac{1}{2} \phi_1^2 \quad \text{et} \quad \cos \phi_2 \simeq 1 - \frac{1}{2} \phi_2^2$$

$$\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \simeq \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \left(1 - \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_1)^2\right) \simeq \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$$

- Energie mécanique : (A.11.17) \Rightarrow 2^e ordre en ϕ_1 , ϕ_2 , $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g \ell_1 \phi_1^2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 g \ell_2 \phi_2^2 \\ & + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - (m_1 + m_2) g \ell_1 - m_2 g \ell_2 \end{aligned} \tag{A.11.22}$$

- Conservation de l'énergie mécanique : $\dot{E} = 0$

$$\begin{aligned} & \left[(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\phi}_1 + (m_1 + m_2) g \ell_1 \phi_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_2 \right] \dot{\phi}_1 \\ & + \left[m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 g \ell_2 \phi_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_1 \right] \dot{\phi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (A.11.23)$$

- Equations du mouvement : (A.11.23) satisfaite pour tout $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$

$$(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\phi}_1 + (m_1 + m_2) g \ell_1 \phi_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (A.11.24)$$

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 g \ell_2 \phi_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (A.11.25)$$

- Equations du mouvement : $\ell = \ell_1 = \ell_2$ et $m = m_1 = m_2$

$$2m \ell^2 \ddot{\phi}_1 + 2m g \ell \phi_1 + m \ell^2 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (A.11.26)$$

$$m \ell^2 \ddot{\phi}_2 + m g \ell \phi_2 + m \ell^2 \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (A.11.27)$$

- Equations du mouvement : divisée par $m \ell^2$

$$2 \ddot{\phi}_1 + 2 \frac{g}{\ell} \phi_1 + \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (A.11.28)$$

$$\ddot{\phi}_2 + \frac{g}{\ell} \phi_2 + \ddot{\phi}_1 = 0 \quad (A.11.29)$$

- Système matriciel :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A.11.30)$$

- Système matriciel : forme condensée

$$A \ddot{\Phi} + \frac{g}{\ell} B \Phi = 0 \quad (A.11.31)$$

- Matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (A.11.32)$$

- Solutions réelles : mouvements harmoniques oscillatoires de pulsation ω

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t + \varphi)} \right) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = \cos(\omega t + \varphi) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} \quad (A.11.33)$$

- Dérivées temporelles secondes :

$$\ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = -\omega^2 \Phi \quad (A.11.34)$$

- Système matriciel : forme condensée

$$C(\omega^2) \Phi \equiv \left(\frac{g}{\ell} B - \omega^2 A \right) \Phi = \mathbf{0} \quad (A.11.35)$$

- Matrice :

$$C(\omega^2) = \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{pmatrix} \quad (A.11.36)$$

- Déterminant : (A.11.37)

$$\det(C(\omega^2)) = \begin{vmatrix} 2\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{vmatrix} = 2\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)^2 - \omega^4 = 0$$

- Valeurs propres :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g}{\ell} \left(2 \pm \sqrt{2} \right) \quad (A.11.38)$$

- Equations aux valeurs propres : forme condensée

$$C(\omega_{\pm}^2) \Phi_{\pm} = 0 \quad (A.11.39)$$

- Equations aux valeurs propres : système matriciel

$$\begin{pmatrix} 2\left(\frac{g}{\ell} - \omega_{\pm}^2\right) & -\omega_{\pm}^2 \\ -\omega_{\pm}^2 & \frac{g}{\ell} - \omega_{\pm}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm 1} \\ \phi_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A.11.40)$$

- Valeurs propres :

$$\omega_{\pm} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (A.11.41)$$

- Equations aux valeurs propres : système matriciel

$$\frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2(-1 \mp \sqrt{2}) & -2 \mp \sqrt{2} \\ -2 \mp \sqrt{2} & -1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm 1} \\ \phi_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A.11.42)$$

- Conditions :

$$\begin{aligned} - (2 \pm 2\sqrt{2}) \phi_{\pm 1} + (-2 \mp \sqrt{2}) \phi_{\pm 2} &= 0 \\ - (2 \pm \sqrt{2}) \phi_{\pm 1} + (-1 \mp \sqrt{2}) \phi_{\pm 2} &= 0 \end{aligned} \quad (A.11.43)$$

- Vecteurs propres : rapport des composantes

$$\frac{\phi_{\pm 1}}{\phi_{\pm 2}} = \frac{-2 \mp \sqrt{2}}{2 \pm 2\sqrt{2}} = \frac{-1 \mp \sqrt{2}}{2 \pm \sqrt{2}} \quad (A.11.44)$$

- Vecteurs propres :

$$\Phi_+(t) = \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_-(t) = \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (A.11.45)$$

- Solution vectorielle : générale

$$\Phi(t) = c_+ \Phi_+(t) + c_- \Phi_-(t) \quad (A.11.46)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = c_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} + c_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Equations horaires : générales (A.11.47)

$$\phi_1(t) = (-1 - \sqrt{2}) c_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) + (-1 + \sqrt{2}) c_- \sin(\omega_- t + \varphi_-)$$

$$\phi_2(t) = (2 + \sqrt{2}) c_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) + (2 - \sqrt{2}) c_- \sin(\omega_- t + \varphi_-)$$

Les coefficients c_+ et c_- sont déterminés par les conditions initiales.

- Equations de la vitesse : générales (A.11.48)

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1(t) = & - \left(-1 - \sqrt{2} \right) c_+ \omega_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) \\ & - \left(-1 + \sqrt{2} \right) c_- \omega_- \sin(\omega_- t + \varphi_-)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_2(t) = & - \left(2 + \sqrt{2} \right) c_+ \omega_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+) \\ & - \left(2 - \sqrt{2} \right) c_- \omega_- \sin(\omega_- t + \varphi_-)\end{aligned}$$

- Conditions initiales : petites angles et vitesses angulaires nulles

$$\phi_1(0) = \phi_{1,0} \quad \text{et} \quad \phi_2(0) = \phi_{2,0} \quad (A.11.49)$$

$$\dot{\phi}_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\phi}_2(0) = 0 \quad (A.11.50)$$

- Angles de déphasage : nuls

$$\varphi_+ = \varphi_- = 0 \quad (A.11.51)$$

- Angles initiaux :

$$\phi_{1,0} = \left(-1 - \sqrt{2} \right) c_+ + \left(-1 + \sqrt{2} \right) c_- \quad (A.11.52)$$

$$\phi_{2,0} = \left(2 + \sqrt{2} \right) c_+ + \left(2 - \sqrt{2} \right) c_-$$

- Application linéaire : angles initiaux (A.11.52)

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$$

- Application linéaire inverse : coefficients $\det(M) = -2\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \phi_{2,0} \end{pmatrix} \quad (A.11.53)$$

- Coefficients :

$$\begin{aligned} c_+ &= \frac{-2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{1,0} + \frac{-1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{2,0} \\ c_- &= \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{1,0} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{2,0} \end{aligned} \quad (A.11.54)$$

- Équations horaires : (A.11.55)

$$\phi_1(t) = (-1 - \sqrt{2}) c_+ \cos(\omega_+ t) + (-1 + \sqrt{2}) c_- \cos(\omega_- t)$$

$$\phi_2(t) = (2 + \sqrt{2}) c_+ \cos(\omega_+ t) + (2 - \sqrt{2}) c_- \cos(\omega_- t)$$

- Equations horaires : (A.11.56)

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \left(-1 - \sqrt{2}\right) \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{1,0} + \frac{-1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{2,0} \right) \cos(\omega_+ t) \\ &\quad + \left(-1 + \sqrt{2}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{1,0} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{2,0} \right) \cos(\omega_- t) \\ \phi_2(t) &= \left(2 + \sqrt{2}\right) \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{1,0} + \frac{-1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{2,0} \right) \cos(\omega_+ t) \\ &\quad + \left(2 - \sqrt{2}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{1,0} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \phi_{2,0} \right) \cos(\omega_- t)\end{aligned}$$

- Equations horaires : (A.11.57)

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \frac{1}{4} \left(2\phi_{1,0} - \sqrt{2}\phi_{2,0} \right) \cos(\omega_+ t) + \frac{1}{4} \left(2\phi_{1,0} + \sqrt{2}\phi_{2,0} \right) \cos(\omega_- t) \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{2} \left(\phi_{2,0} - \sqrt{2}\phi_{1,0} \right) \cos(\omega_+ t) + \frac{1}{2} \left(\phi_{2,0} + \sqrt{2}\phi_{1,0} \right) \cos(\omega_- t)\end{aligned}$$